Números e álgebra no currículo escolar[1]

João Pedro da Ponte
Grupo de Investigação DIFMAT
Departamento de Educação e Centro de Investigação em Educação
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Resumo. Esta conferência tem por objectivo discutir os problemas que se colocam actualmente aos Números e Álgebra, dois temas que considero fundamentais no currículo da Matemática escolar, mas que pouca atenção têm tido na Educação Matemática em Portugal. Em primeiro lugar, analiso diversos aspectos que têm de ser tidos em conta na abordagem curricular dos conceitos numéricos e algébricos, incluindo os modelos intuitivos essenciais, as formas de representação fundamentais, o uso que se dá às tecnologias e a natureza das actividades a realizar pelos alunos. Analiso igualmente algumas das principais dificuldades dos alunos na Aritmética e na passagem da Aritmética para a Álgebra, ou seja, aos problemas associados ao desenvolvimento do pensamento algébrico. Argumento, então, que no campo dos Números os principais problemas do currículo actual português prendem-se, por um lado, com a aprendizagem dos racionais, dada a insuficiente articulação entre as representações decimal e fraccionária e a reduzida atenção aos modelos intuitivos importantes para o desenvolvimento do conceito de número racional; prendem-se, por outro lado, com a visão redutora que prevalece quanto à actividade de aprendizagem do aluno, demasiado centrada no exercício e pouco atenta às potencialidades dos problemas e das explorações e investigações. Argumento, igualmente, que no campo da Álgebra, o principal problema do currículo português tem a ver com o seu quase desaparecimento como área bem definida, empobrecendo seriamente as experiências de aprendizagem de iniciação ao pensamento algébrico; daqui decorre uma variedade de problemas respeitantes aos contextos, representações, uso da tecnologia e actividades de aprendizagem. Argumento, finalmente, que pelos seus problemas específicos e pela evolução da sociedade, da educação e da tecnologia, estas questões devem merecer atenção central da educação matemática portuguesa.

Palavras-Chave: Álgebra, Números, Sentido de número, Pensamento algébrico, Currículo de Matemática.

Abstract. This conference aims to discuss the problems faced today by the teaching of number and algebra, two topics that I regard as fundamental in the school mathematics curriculum, but that have attracted little attention by Portuguese mathematics education. First, I analyse several aspects that must be taken into account in curriculum approaches of numerical and algebraic concepts, including the essential intuitive models, the fundamental forms of representation, the place of technology and the nature of the activities to be carried out by pupils. I also analyze some of the main difficulties of students in Arithmetic and in moving from Arithmetic to Algebra, that is, the problems associated to the development of algebraic thinking. I argue that in the field of number the main problems of the current Portuguese curriculum are related, one the one hand, with learning of rational numbers, given the insufficient articulation between decimal and fraction representations and the little attention paid to important intuitive models for developing the concept of rational number; these problems also relate, on the other hand, with a narrow prevailing view regarding the pupil learning activity of the, too much centred in exercises and little attentive of the potential of problems and explorations and investigations. I also argue that, in the field of Algebra, the main problem of the Portuguese curriculum is related to its almost disappearance as a well defined area, impoverishing in a serious way the learning experiences of initiation to algebraic thinking; from this, it follows a number of problems related to contexts, representations, use of technology and learning activities. I argue, finally, that, because of its specific problems and because of the evolution of the society, of education and of technology, these questions deserve central attention from Portuguese mathematics education.

Keywords: Algebra, Number, Number sense, Algebraic thinking, Mathematics curriculum.

[1] Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos, & P. Canavarro (Eds.), *Números e álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.

Na maioria dos países, Números e Álgebra são dois temas fundamentais da Matemática escolar. Os Números têm um papel decisivo nas aprendizagens matemáticas nos primeiros anos de escolaridade e a Álgebra surge como um tema matemático fundamental a partir dos anos intermédios. Quem não tiver uma capacidade razoável de trabalhar com números e suas operações e de entender e usar a linguagem abstracta da Álgebra fica *ipso facto* seriamente limitado nas suas opções escolares e profissionais e no seu exercício da cidadania democrática. No entanto, em Portugal, estes temas têm merecido pouca atenção no campo da Educação Matemática. Ao contrário da Geometria (e até da Estatística), que têm sido objecto de encontros temáticos e são o centro de interesse de grupos de trabalho de professores, pouco se tem reflectido sobre o papel dos Números e da Álgebra no currículo, sobre as razões porque os alunos portugueses mostram tão fraco desempenho nestes campos e sobre o que pode ser feito para melhorar as respectivas aprendizagens.

1. Universos numéricos e aspectos do conceito de número

Números e Álgebra são duas das grandes áreas da Matemática. Embora com percursos diferentes, o seu desenvolvimento tem importantes pontos de contacto ao longo dos tempos. Deste modo, importa ter presentes alguns aspectos de natureza histórica e epistemológica, indispensáveis para perspectivar as questões que se colocam relativamente ao seu papel nos ensinos básico e secundário.

Comecemos então pelos números. Os programas de Matemática portugueses indicam que os alunos devem trabalhar com diversos universos numéricos[2]. Os números *naturais e inteiros* (no sentido de "naturais mais o zero") e as suas operações surgem logo no 1.º ciclo do ensino básico. Os *números racionais absolutos* começam a ser abordados no 1.º ciclo, nas representações "operador" e "número decimal". Assim, no 2.º ano aparecem os operadores ½ e 1/4, como inversos de "dobro de" e de "quatro vezes"; no 3.º ano surgem os operadores 1/3, 1/5 e 1/10, como inversos de "três, cinco e dez vezes"; e nos 3.º e 4.º anos os alunos trabalham com números decimais (até 0,001), aprendendo a representá-los por dígitos e na recta graduada. O estudo dos *racionais absolutos*, com toda a generalidade e as respectivas operações aritméticas, é feito apenas no 2.º ciclo. Neste mesmo ciclo (no 6.º ano) estudam-se os *inteiros relativos* bem como

[2] A análise que se segue tem por base os documentos curriculares presentemente em vigor em Portugal para os diversos níveis de ensino (ME-DGEBS, 1990, 1991a, 1991b, 1991c, 1991d; ME-DES, 2001-02).

as respectivas operações. O estudo dos *racionais relativos* é feito depois no 3.º ciclo (7.º ano). Os *números reais* surgem também no 3.º ciclo, mas um pouco mais tarde (9.º ano). Finalmente, os *números complexos* estudam-se presentemente no ensino secundário (12.º ano).

Os matemáticos levaram muitos séculos a compreender cabalmente os números. Os gregos, excelentes a lidar com a Geometria, não conseguiram encontrar uma forma produtiva de encarar os números irracionais. Por isso, não conseguiram obter uma solução numérica satisfatória para o problema da determinação do comprimento da diagonal do quadrado de lado 1. Na alta Idade Média, na Europa, usava-se ainda o sistema de numeração romana. Levou mais de 400 anos até que os europeus reconhecessem as limitações do sistema de numeração romana e aceitassem as vantagens do sistema de numeração decimal de posição indu-árabe (ver Boyer & Herzbach, 1989). Descartes, em pleno século XVII tinha a maior das desconfianças em relação aos números inteiros negativos a que chamava de "falsos". A própria designação de "números imaginários", que ainda hoje perdura, é bem reveladora dos problemas com que se debateram os matemáticos até aceitarem estes objectos como seres matemáticos de pleno direito. A verdade é que presumimos muitas vezes que os conceitos numéricos constituem um assunto fácil quando, pelo contrário, se trata de construções intelectuais extremamente complexas e engenhosas.

Os números naturais permitem a contagem do número de elementos de uma colecção de objectos. No entanto, são insuficientes para medir grandezas de natureza contínua, como comprimento, área, volume e tempo, o que torna necessário a introdução de uma nova classe de números, os números racionais (absolutos). Para descrever grandezas do mundo físico e social que podem variar em sentidos opostos são necessários os números (inteiros ou racionais) relativos. Por considerações internas à própria Matemática, para se obter coerência e se conseguir resolver alguns problemas (como o problema da razão entre o perímetro e o raio da circunferência ou encontrar a solução geral da equação do 3.º grau) chega-se mais tarde à conclusão de que os números naturais, racionais e relativos, necessitam de ser complementados com novas classes de números, os números reais e os números complexos[3].

É verdade que a contagem fornece um importante modelo intuitivo para a compreensão dos números naturais e a recta numérica fornece uma boa base de entendimen-

[3] Uma descrição das etapas na construção dos diversos universos numéricos é magistralmente realizada por Caraça (1958).

to para os números relativos. No entanto, as coisas são muito mais complicadas para os números racionais, em cuja construção intervêm necessariamente pares ordenados e classes de equivalência de pares ordenados. Além disso, estes números admitem uma variedade de interpretações (parte-todo, quociente, razão, medida, operador...) e requerem, portanto, uma diversidade de modelos intuitivos. Para os números reais, a complexidade eleva-se a um patamar muito superior, de tal modo que o seu tratamento rigoroso (onde intervém necessariamente o conceito de infinito) é deixado, habitualmente, para o ensino superior. No 3.º ciclo do ensino básico e no ensino secundário é apenas apresentada aos alunos a noção intuitiva de que os números reais constituem uma extensão dos números racionais, sendo representados por dízimas (representações de números sob a forma decimal) infinitas que, em vez de serem periódicas, são não periódicas.

São muitos os aspectos que importa considerar no conceito de número (ver o Quadro 1). Para começar, há diversas formas de representação dos números: por palavras, por diagramas, pelo sistema indu-árabe, etc. Depois, com os números fazem-se diversas operações, como adicionar, subtrair, multiplicar e dividir. Estas operações podem ser feitas mentalmente ou com recurso a instrumentos (como o ábaco, a calculadora, ou os algoritmos de papel e lápis). Em certos casos, mais do que saber o valor exacto que constitui o resultado de uma certa operação, é antes necessário obter uma boa estimativa. Além disso, algumas das operações aritméticas têm propriedades importantes (por exemplo, elemento neutro, elemento absorvente, comutativa, associativa, existência de inverso para cada número). A compreensão dos números, das ordens de grandeza e do significado das operações constitui a base do que se designa muitas vezes por "sentido de número" (para uma discussão deste conceito, ver Cebola, 2002). Temos ainda que os números e as operações com números constituem conjuntos dotados de uma certa estrutura (algébrica) onde é possível estabelecer relações (como a relação de ordem) e estudar propriedades (como a densidade). Nos conjuntos numéricos usuais encontram-se, assim, exemplos de grupóides, semi-grupos, grupos, anéis, corpos, etc.

Os modelos intuitivos que se privilegiam, as representações que se usam e os outros aspectos do conceito de número a que se dá destaque marcam fortemente a abordagem curricular. Todos estes aspectos estão de uma forma ou de outra presentes em qualquer currículo escolar, uns com mais visibilidade e importância do que outros. Um currículo consistente e coerente tem de dar atenção a todos eles e definir uma linha de rumo que seja produtiva para o trabalho dos professores e a aprendizagem dos alunos.

Quadro 1 – Aspectos do conceito de número

▪ Modelos e interpretações dos conceitos numéricos;
▪ Formas de representação dos números;
▪ Operações…
▪ Cálculo;
▪ Algoritmos…
▪ Estimação;
▪ Propriedades das operações com números;
▪ Estrutura interna dos diversos universos numéricos;
▪ Relações entre diversos universos e estruturas numéricas…

2. A Álgebra e o pensamento algébrico

Olhemos agora para a Álgebra. Historicamente, as origens da Álgebra remetem para a formalização e sistematização de certas técnicas de resolução de problemas. Encontramos muitos aspectos disso na Antiguidade – no Egipto, na Babilónia, na China e na Índia. O célebre papiro de Amhes/Rhind é um documento matemático cheio de técnicas de resolução de problemas com um marcado cunho algébrico (ver Stanic e Kilpatrick, 1989). A pouco e pouco vai-se definindo o conceito de equação e a Álgebra passa a ser entendida como o estudo da resolução de equações ("algébricas"). Um autor da Antiguidade, por alguns considerado o fundador da Álgebra, é Diofanto (329-409 d. C.), que desenvolveu métodos aproximados para a resolução de diversos tipos de equações e sistemas num estilo de linguagem abreviado conhecido como "sincopado".

O termo Álgebra é cunhado só alguns séculos mais tarde por al-Khwarizmi (790-840) para designar a operação de transposição de termos, essencial na resolução de equações[4]. No entanto, as equações do 1.º e 2.º grau já eram resolvidas na Antiguidade (embora de forma hoje dificilmente reconhecível).

A equação geral do 3.º grau mostrou-se muito mais difícil de resolver e resistiu a todos aos esforços dos matemáticos até ao século XVI. Foi Scipione del Ferro (1465-1526) quem conseguiu primeiro resolver esta equação, embora sem publicar os seus resultados, descoberta que foi de seguida feita igualmente por Tartaglia (1500-1557) e publicada por Cardano (1501-1576) (na sua *Ars Magna*). Finalmente, a equação geral do 4.º grau foi resolvida por Ferrari (1522-1565). O sucesso destes matemáticos italianos marca um momento importante na história da Matemática pois, como referem Kol-

[4] Literalmente, *aljabr w'al muqabalah* significa "completar e reduzir" (Bekken, 1994, p. 59).

mogorov et al. (1977), foi a primeira vez que a ciência moderna ultrapassou claramente os êxitos dos antigos. Note-se que são os processos de resolução das equações algébricas do 3.º grau que fazem surgir a necessidade da introdução de um novo tipo de números, os números complexos.

Outra questão central da teoria das equações é a de saber quantas soluções pode ter uma equação de grau *n* (ou, noutros termos, quantos zeros pode ter uma função polinomial). Viète (1540-1603) indicou equações de grau *n* com *n* soluções, mas o primeiro matemático a afirmar que uma tal equação tem sempre *n* soluções foi Girard (1595-1632), em 1629, curiosamente num livro intitulado *L'invention en Algèbre*. Este teorema fundamental teve diversas propostas de demonstração, todas elas refutadas, numa história interessantíssima em que intervêm matemáticos famosos como Leibniz (1642-1727), Euler (1707-1783), d'Alembert (1717-1783) e Lagrange (1736-1813) até ser finalmente resolvido de modo satisfatório primeiro por Argand (1768-1822), em 1814, e, depois, por Gauss (1777-1855), em 1816.

Dois importantes resultados marcam a etapa final do desenvolvimento desta teoria: (i) a prova da impossibilidade de encontrar uma solução geral para uma equação com coeficientes arbitrários de grau superior ao 4.º, dada por Abel (1802-1829), e (ii) a formulação das condições necessárias e suficientes para que uma equação de grau superior ao 4.º tenha solução por métodos algébricos, dada por Galois (1811-1832). É Galois quem, neste seu trabalho, estuda pela primeira vez a estrutura de grupo.

A partir de meados do século XIX a Álgebra conhece uma evolução profunda. O estudo das equações (algébricas) esgota-se com a demonstração do teorema fundamental da Álgebra e com a demonstração de que não existem métodos gerais (algébricos) para a resolução de equações de grau superior ao 4.º.[5] A partir dessa altura, a atenção dos matemáticos começa a voltar-se cada vez mais para o estudo de estruturas abstractas como grupo, espaço vectorial, anel, corpo e conjunto.

A visão mais habitual da Álgebra é que se trata simplesmente de regras de transformação de expressões (monómios, polinómios, fracções algébricas, expressões com radicais…) e processos de resolução de equações. Isso é testemunhado pela terminologia usada nos actuais programas dos 2.º e 3.º ciclos do ensino básico que, em vez de falarem em "Álgebra", falam apenas em "cálculo" ou, ou seja, em "cálculo algébrico"[6].

[5] No entanto, o estudo de equações diferenciais, tanto ordinárias como com derivadas parciais, continua, ainda hoje, a ser um fértil campo de investigação matemática.

[6] ME-DGEBS (1991c, 1991d).

Trata-se, claramente, de uma visão redutora da Álgebra, que desvaloriza muitos aspectos importantes desta área da Matemática, quer relativos à Antiguidade (resolução de problemas), quer actuais (relações, estruturas algébricas), quer mesmo do período "clássico" da Álgebra (estudo de funções e da variação em geral).

Em termos epistemológicos, a natureza de cada campo da Matemática está relacionada com os objectos com que esse campo trabalha mais directamente. Deste modo, no centro das atenções da Aritmética temos os números (inteiros/racionais/reais/ /complexos) e as suas operações; na Geometria temos os objectos geométricos, abstracções dos objectos do plano e do espaço (pontos, rectas/segmentos/figuras, planos/poliedros, etc.) e suas transformações; na Análise Infinitesimal temos os processos infinitos (que dão origem aos infinitésimos e infinitamente grandes, base dos conceitos de limite e continuidade); na teoria das Probabilidades temos os acontecimentos aleatórios; e na Estatística lidamos com colecções de objectos. Quais são então os objectos fundamentais da Álgebra? Há duzentos anos a resposta seria certamente: "equações". Hoje em dia, essa resposta já não nos satisfaz, uma vez que no centro da Álgebra estão relações matemáticas abstractas, que tanto podem ser equações, inequações ou funções como podem ser outras estruturas definidas por operações ou relações em conjuntos.

A melhor forma de indicar os grandes objectivos do estudo da Álgebra, ao nível escolar, é dizer então que se visa desenvolver o *pensamento algébrico* dos alunos. Este pensamento inclui a capacidade de manipulação de símbolos mas vai muito além disso. Assim, segundo o NCTM (2000), o pensamento algébrico diz respeito ao estudo das estruturas, à simbolização, à modelação e ao estudo da variação:

- Compreender padrões, relações e funções (Estudo das estruturas),
- Representar e analisar situações matemáticas e estruturas, usando símbolos algébricos (Simbolização),
- Usar modelos matemáticos para representar e compreender relações quantitativas (Modelação),
- Analisar mudança em diversas situações (Estudo da variação). (p. 37)

Podemos então dizer que o pensamento algébrico inclui a capacidade de lidar com o cálculo algébrico e as funções. No entanto, inclui igualmente a capacidade de lidar com muitas outras estruturas matemáticas e usá-las na interpretação e resolução de problemas matemáticos ou de outros domínios. A capacidade de manipulação de símbolos é um dos elementos do pensamento algébrico, mas também o é o "sentido do símbolo" (*symbol sense*), como diz Arcavi (1994), ou seja, a capacidade de interpretar e de usar de forma criativa os símbolos matemáticos, na descrição de situações e na resolução de problemas. Ou seja, no *pensamento algébrico* dá-se atenção não só aos objectos mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações tanto quanto possível de modo geral e abstracto. Por isso, uma das vias privilegiadas para promover este raciocínio é o estudo de padrões e regularidades.

3. Investigações sobre a aprendizagem dos alunos

Em Portugal foram realizados diversos trabalhos de investigação sobre a aprendizagem dos números, na sua maior parte tendo por base a teoria de Piaget. Esta investigação incidiu principalmente sobre as primeiras aprendizagens do número (nomeadamente, a conservação do conceito de número) e concluiu, de um modo geral, que o nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos portugueses é, neste campo, extremamente problemático. No entanto, dadas as objecções cada vez mais fortes à teoria piagetiana, que valoriza sobretudo os aspectos formais do conhecimento, estes resultados acabaram por não ter muita influência nos programas e nas práticas pedagógicas (Ponte, Matos & Abrantes, 1998).

O estudo das dificuldades conceptuais dos alunos nos conceitos numéricos mais elaborados (números racionais, inteiros e racionais e suas operações e sentido de número) tem vindo a ganhar crescente atenção nos últimos anos[7], mas o seu balanço está ainda largamente por fazer. Tendo em atenção os resultados das provas de aferição realizadas em Portugal, e no que se refere especificamente ao cálculo, os pontos críticos na aprendizagem dos conceitos numéricos por parte dos alunos parecem ser: (i) o cálculo com números inteiros multidígitos (já no 1.º ciclo), incluindo saber executar os algoritmos e usá-los em problemas concretos (especialmente a divisão), e (ii) a compreensão dos diversos significados e o cálculo com os números racionais (um tema forte no 2.º ciclo e que se prolonga para o 3.º ciclo)[8].

A experiência mostra que muitos alunos têm grandes dificuldades nos Números e suas operações. Outros, no entanto, conseguem um nível de desempenho razoável neste campo, mas deparam-se depois com grandes dificuldades na aprendizagem da

[7] Esta crescente atenção é, em grande medida, decorrente do facto de se terem começado a realizar mestrados especificamente orientados para o 1.º ciclo do ensino básico.
[8] Ver os resultados das provas de aferição em: http://www.deb.min-edu.pt/avalexam/avafer.asp.

Álgebra. Uma das razões dessas dificuldades tem a ver com diversas subtilezas e mudanças de sentido dos símbolos quando se passa de um campo para outro. Usiskin (1988) ilustra este problema mostrando a diversidade de sentidos que pode ter o sinal "=":

$$A = LW \qquad (1)$$

$$20 = 5\mathrm{x} \qquad (2)$$

$$\sin x = \cos x \tan x \qquad (3)$$

$$1 = n\frac{1}{n} \qquad (4)$$

$$y = kx \qquad (5)$$

A expressão (1) traduz a fórmula da área do rectângulo (área = comprimento vezes a largura), onde o sinal = representa "um cálculo a realizar". A expressão (2) contém uma equação "para resolver", ou seja, indica que é preciso encontrar o "valor de *x*". A expressão (3) representa uma identidade, algo que é sempre verdadeiro. A expressão (4) indica uma propriedade dos números inteiros. E, finalmente, a expressão (5) representa a função de proporcionalidade directa e, neste caso "=" indica uma relação e não algo que seja para calcular ou resolver.

Sublinha-se constantemente que a Álgebra envolve uma forte simbolização. Na verdade, a simbolização começa logo na Aritmética:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, +, -, $\times$, :, =, 2^3

A Álgebra acrescenta novos símbolos e envolve uma mudança de significado de alguns dos símbolos existentes:

Novos símbolos: *x*, *y*, <, >, $\Leftrightarrow$, $\{$ ...
Mudança do significado: =, +...
Símbolos para operações abstractas: θ, σ, ω, φ, μ, η, λ...

Na educação matemática não faltam "condenações" do simbolismo. No entanto, ele é parte essencial da Matemática, que não podemos dispensar. Na verdade, o simbolismo coloca um problema complicado de resolver. Por um lado, os símbolos têm grande valor. Na verdade, o simbolismo algébrico tem o poder de aglutinar ideias concebidas operacionalmente em agregados compactos, tornando por isso a informação mais fácil de compreender e manipular. Por outro lado, o simbolismo acarreta grandes perigos para o processo de ensino-aprendizagem, pois caímos no formalismo quando perdemos de vista o significado do que os símbolos representam e apenas damos atenção aos símbolos e ao modo de os manipular (Davis e Hersh, 1995).

As dificuldades dos alunos na transição da Aritmética para a Álgebra têm sido discutidas por numerosos autores, como Booth (1994) e Rojano (2002). Alguns exemplos dessas dificuldades podem ver-se no Quadro 2.

Quadro 2 – Dificuldades dos alunos na passagem da Aritmética para a Álgebra

- Dar sentido a uma expressão algébrica,
- Não ver a letra como representando um número,
- Atribuir significado concreto às letras,
- Pensar uma variável com o significado de um número qualquer,
- Passar informação da linguagem natural para a algébrica.
- Compreender as mudanças de significado, na Aritmética e na Álgebra, dos símbolos + e =,
- Não distinguir adição aritmética (3+5) da adição algébrica (x+3),

4. Pontos de reflexão para a abordagem dos números no currículo

Para o NCTM (2000), os números constituem uma parte fundamental dos programas de Matemática. Na perspectiva deste documento, "toda a Matemática proposta do jardim de infância (*Pre-K*) ao 12.º ano está fortemente baseada nos números" (p. 32). O NCTM argumenta que "os princípios que governam a resolução de equações em Álgebra são os mesmos que as propriedades estruturais dos números; em Geometria e Medida, os atributos são descritos com números; e toda a área de Análise de Dados envolve o sentido de número[9]" (p. 32).

Aspectos do currículo. A análise do currículo de Matemática de Portugal e de outros países, no campo dos números e operações, evidencia ênfases distintas que importa registar.

1. Uma questão fundamental é a das *intuições e modelos básicos* que servem de suporte às aprendizagens dos alunos. Um modelo fundamental para os números naturais, como referi, é o da contagem. Para os números racionais e para os inteiros relativos um outro modelo importante é a recta ("cheia" ou "vazia"). Além disso, o estudo dos números racionais pode ter por base os modelos operador, parte-todo ou mesmo outros modelos. Quais as opções dos programas portugueses? Serão as mais adequadas à luz da investigação actual em educação matemática?

[9] *Making sense of numbers*, no original.

2. Outra questão também importante é a de saber quais os principais *conceitos estruturantes* no que se refere aos números e operações. Por exemplo, no que respeita à aprendizagem dos números inteiros e operações com inteiros, qual a importância que assume a compreensão do sistema decimal de posição? Qual a importância que se dá aos algoritmos das operações? Às propriedades das operações? E às expressões numéricas?

3. Outra questão também a considerar é a das *representações* fundamentais. Em Portugal, no 1.º ciclo do ensino básico, dá-se mais saliência aos números decimais do que às fracções. Na prática trata-se de duas representações alternativas (e complementares) para os números racionais. Os números decimais surgem de modo natural nas calculadoras e estão mais presentes no quotidiano dos alunos do que as fracções. São certamente mais importantes na estimação e no cálculo mental. No entanto, não evidenciam de modo muito claro a natureza dos conceitos numéricos que representam. Por outro lado, a representação sob a forma de fracção remete de forma mais directa para a natureza do número em causa[10] mas é menos prática para efeitos de cálculo exacto ou para obter estimativas. Cabe perguntar: o conceito de número racional não deveria ter mais saliência no 1.º ciclo? Quais as consequências da valorização da representação decimal em detrimento da fraccionária? Quais seriam as consequências da opção diversa? Que aspectos é necessário ter em consideração para promover a compreensão dos números racionais por parte dos alunos?

4. Outra questão importante diz respeito ao modo de perspectivar o estudo dos *algoritmos*. Sabemos bem que o ensino dos algoritmos sem que os alunos tenham desenvolvido o significado das operações leva a uma mecanização sem compreensão que se traduz não só em fracos desempenhos como também numa atitude de rejeição da Matemática. Para promover uma aprendizagem significativa, muitos autores recomendam que se estimulem os alunos a inventar os seus próprios algoritmos. No entanto, não é muito claro em que momento e de que modo devem ser introduzidos os algoritmos usuais nem qual o nível máximo de complexidade nos algoritmos a realizar pelos alunos.

5. Necessário é também considerar o papel da *tecnologia*, em especial, da *calculadora*. Na verdade, a calculadora simples realiza todas as operações numéricas com elevada precisão. No entanto, continua a ser forte a divisão entre os que defendem que o seu uso pelos alunos deve ser proibido ou, pelo menos, fortemente limitado, e os que

[10] Note-se, no entanto, que o número racional é uma classe de equivalência e a fracção não é mais do que um seu representante (por exemplo, 1/2, 2/4, 10/20 são fracções diferentes que representam todas elas o mesmo número racional).

acham que a calculadora deve ser usada livremente em todas as circunstâncias. Na prática, muitos professores consideram que a calculadora deve ser usada apenas para confirmar os resultados obtidos pelos algoritmos de papel e lápis. O que é necessário para que a calculadora seja vista também como um instrumento de exploração? O que é necessário fazer para que os alunos adquiram espírito crítico em relação aos resultados que esta proporciona? O seu uso pelos alunos deve ser totalmente livre ou sujeito a algumas regras? Quais? A verdade é que em Portugal a questão da calculadora permanece um problema por resolver, pelo menos ao nível das práticas curriculares (Ponte & Serrazina, 2004)[11]. É preciso, por isso, questionar a origem deste problema.

6. Finalmente, mas nem por isso menos importante, temos de saber quais são as formas fundamentais de que se reveste a *actividade dos alunos* no trabalho com números. Isso tem a ver com as tarefas a propor, nomeadamente a ênfase em exercícios, problemas, explorações e investigações. Tem a ver também com os modos de raciocínio que os alunos devem desenvolver. No campo dos números e operações, é preciso saber, por exemplo, como promover a articulação entre o cálculo mental, o cálculo de papel e lápis e o cálculo com a calculadora...

Os programas portugueses e as propostas do NCTM. Em Portugal, os programas do 1.º ciclo (de 1991) e do 2.º ciclo colocam bastante ênfase na resolução de problemas. Além disso, o programa do 2.º ciclo procura integrar, tanto quanto possível, conceitos de Números, Geometria e Medida. Tudo isso é certamente muito positivo. Pelo seu lado, o *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) formula um conjunto de seis grandes objectivos de aprendizagem na área dos Números que se transcrevem no Quadro 3. Estes objectivos incluem os aspectos essenciais da compreensão dos Números e das operações e suas formas de representação, a fluência de cálculo, a compreensão das ordens de grandeza e as capacidades de estimação, exploração, investigação e resolução de problemas.

Pelo seu lado, os *Principles and Standards* (NCTM, 2000), apresentam outra formulação para os objectivos de aprendizagem na área dos números. Segundo este documento, desde a pré-escola[12] ao 12.º ano os alunos devem ser capazes de: (i) compreender números, formas de representar números, relações entre números e sistemas

[11] O mesmo acontece nos EUA. Uma recente tomada de posição do NCTM (Junho de 2005) sobre o uso da calculadora levantou uma forte polémica. Alguns sectores acusaram esta organização de ter “moderado” a sua posição, enquanto que o NCTM afirma manter o que sempre disse, embora procurando explicá-lo de modo mais claro.

[12] *Kindergarden* (K), frequentado por alunos com 5-6 anos.

numéricos; (ii) compreender significados de operações e como elas se relacionam umas com as outras; e (iii) calcular fluentemente e fazer estimativas razoáveis (p. 32). O NCTM (2000) resume a sua proposta em três ideias-chave: (i) compreender os números; (ii) desenvolver o sentido de número; e (iii) desenvolver a fluência computacional (ver o Quadro 4). Na verdade, compreender os números, operações e sistemas numéricos, perceber as "grandes ideias" e o modo de utilizar os conceitos numéricos e desenvolver a capacidade de cálculo usando os modos e instrumentos mais adequados a cada situação parecem ser os objectivos fundamentais para a aprendizagem dos alunos neste campo da Matemática.

Quadro 3 – Objectivos de aprendizagem na área dos Números do *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001)

- A compreensão global dos números e das operações e a sua utilização de maneira flexível para fazer julgamentos matemáticos e desenvolver estratégias úteis de manipulação dos números e das operações,
- O reconhecimento e a utilização de diferentes formas de representação dos elementos dos conjuntos numéricos, assim como das propriedades das operações desses conjuntos,
- A aptidão para efectuar cálculos mentalmente, com os algoritmos de papel e lápis ou usando a calculadora, bem como para decidir qual dos métodos é apropriado à situação,
- A sensibilidade para a ordem de grandeza dos números, assim como a aptidão para estimar valores aproximados de resultados de operações e decidir a razoabilidade dos resultados obtidos por qualquer processo de cálculo ou por estimação,
- A predisposição para procurar e explorar padrões numéricos em situações matemáticas e não matemáticas e o gosto por investigar relações numéricas, nomeadamente em problemas envolvendo divisores e múltiplos de números implicando processos organizados de contagem,
- A aptidão para dar sentido a problemas numéricos e para reconhecer as operações que são necessárias à sua resolução, assim como para explicar os métodos e o raciocínio que foram usados.

O que será então preciso rever no programa português no que se refere aos Números? Na minha perspectiva, alguns aspectos que merecem atenção são (i) o modo como se aborda o ensino dos algoritmos; (ii) as indicações relativamente ambíguas sobre o papel das situações contextualizadas e sobre o uso da calculadora; (iii) a reduzida ênfase nos aspectos algébricos (o estudo de padrões e regularidades, por exemplo, não surge no programa do 2.º ciclo); e (iv) a falta de clareza sobre o papel da recta como modelo dos diversos conjuntos numéricos, dos naturais aos racionais relativos.

Quadro 4 – Ideias-chave para a aprendizagem dos números, segundo os *Principles and Standards* (NCTM, 2000, p. 32)

Compreender os números

- O que são…
- Como se representam com objectos, dígitos ou em rectas numéricas,
- Como se relacionam uns com os outros,
- Como fazem parte de sistemas que têm estruturas e propriedades,
- Como é que se usam números e operações para resolver problemas.

Desenvolver o sentido do número

- Capacidade de decompor números naturalmente,
- Usar números particulares como referência, como 100 ou ½,
- Usar as relações entre as operações aritméticas para resolver problemas,
- Compreender o sistema decimal de posição,
- Estimar,
- Compreender os números (*Make sense of numbers*),
- Reconhecer a grandeza relativa e absoluta dos números.

Desenvolver a fluência computacional

- Conhecer as tabuadas (adição, subtracção, multiplicação e divisão),
- Usar métodos eficientes e rigorosos para calcular (eventualmente, combinações de estratégias mentais e de papel e lápis),
- Ser capaz de explicar os seus métodos, compreender que existe sempre uma diversidade de métodos,
- Ser capaz de estimar e de julgar a razoabilidade dos resultados.

5. Pontos de reflexão para a abordagem da Álgebra no currículo

Tal como o fizemos para o caso dos Números, vejamos então quais as grandes decisões que é necessário assumir na construção de um currículo no campo da Álgebra.

Aspectos do currículo. 1. Em primeiro lugar, há que considerar quais são os elementos centrais na abordagem curricular. Observando as grandes correntes na "Álgebra clássica" (por contraponto com a "Álgebra moderna", que se desenvolve a partir do fim do século XIX) distinguimos três temas fundamentais: (i) a manipulação de expressões algébricas (monómios, polinómios, fracções algébricas, radicais…); (ii) o trabalho com equações, sistemas, desigualdades (incluindo equações numéricas e literais dos 1.º e 2.º graus, sistemas de equações, desigualdades dos 1.º e 2.º graus); e (iii) o trabalho com funções (aquilo que se estuda antes do conceito de derivada, que os americanos designam por *pre-calculus*, e onde podemos ter a função linear, afim, a proporcionalidade inversa, a função quadrática, funções homográficas e irracionais). Notemos que as equações, sistemas e desigualdades são um caso especial de expressões, onde intervêm situações de igualdade ou desigualdade e que, além disso, a noção de função é um conceito mais geral que a noção de equação ($y = f(x)$, representando uma função, inclui no fundo uma infinidade de equações). Ou seja, há cerca de um século, os programas davam destaque especial às expressões; mais tarde, em meados do século XX, as equações estavam em primeiro plano e agora, cada vez mais, se dá destaque ao conceito de função.

Esta questão liga-se directamente à questão dos conceitos que assumem um lugar central nos programas: (i) as expressões algébricas, abordagem visível nos manuais da fim do século XIX e início do século XX (ver Fraga et al., 2004); (ii) as equações, como passou a acontecer no período da Matemática moderna; (iii) o conceito de função, como tem vindo a acentuar-se nos currículos mais recentes (é a perspectiva defendida, por exemplo, por Chazan e Yerushalmy, 2003); ou (iv) as estruturas algébricas, abordagem muito valorizada igualmente no período da Matemática moderna, que foi depois secundarizada, mas que tem vindo a regressar de novo ao centro das atenções.

2. Em estreita ligação com o ponto anterior surgem as abordagens didácticas. O ensino da Álgebra elementar tem conhecido mudanças significativas através dos tempos. Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) distinguem três grandes correntes: (i) a *linguístico-pragmática*, assumia que a Álgebra constitui um instrumento técnico mais poderoso que a Aritmética para a resolução de problemas, colocando a ênfase no domínio das respectivas regras sintácticas para a transformação de expressões (que os autores denominam de *transformismo algébrico*); o pressuposto era que se o aluno dominasse essas regras, seria certamente depois capaz de as aplicar a situações concretas; (ii) a *fundamentalista-estrutural*, característica do período da Matemática moderna, dava especial atenção às propriedades estruturais para fundamentar e justificar as transformações das expressões; e (iii) a *fundamentalista analógica*, que procura combinar as duas anteriores, recuperando o valor instrumental da Álgebra e preservando o cuidado com as justificações, com base em modelos analógicos geométricos (figuras, objectos) ou físicos (como a balança[13]). Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) criticam o facto de que qualquer destas concepções reduz a Álgebra aos seus aspectos transformacionistas, colocando a ênfase na sintaxe da linguagem algébrica e não nos significados representados pelos símbolos. Deste modo, propõem um ensino da Álgebra

[13] Note-se que a balança como modelo intuitivo para as equações já era usada no século XVI nos livros de Álgebra de Pedro Nunes.

noutra perspectiva, que leve os alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essa regularidade através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" (p. 87).

Pelo seu lado, Lins e Giménez (1997) distinguem igualmente três grandes correntes nas abordagens didácticas para o ensino da Álgebra. A primeira corrente é o que designam por *visão "letrista"*, que reduz a Álgebra exclusivamente à sua vertente simbólica. Esta visão tem uma versão "pobre", em que o objectivo é aprender a manipular os símbolos (por treino e prática) e tem uma versão "melhorada" segundo a qual o objectivo é aprender a manipular correctamente os símbolos, recorrendo a apoios intuitivos (de novo com destaque para a balança). A segunda corrente vê a Álgebra como *Aritmética generalizada*. A ideia central é que "a actividade algébrica se caracteriza pela expressão da generalidade" (p. 110). Procurando contrariar a tendência anterior, procura-se agora valorizar a linguagem algébrica como meio de representar ideias e não apenas como um conjunto de regras de transformação de expressões simbólicas. A terceira corrente corresponde à *visão "estruturalista"* subjacente ao movimento da Matemática moderna. Para esta tendência, a atenção deve centrar-se nas estruturas algébricas abstractas, ou seja, nas propriedades das operações numéricas ou transformações geométricas. Finalmente, Lins e Giménez (1997) discutem uma quarta corrente, em que a Álgebra é encarada como uma *actividade*. Esta actividade pode desenvolver-se sobretudo a partir de um contexto, mas pode também assumir um cunho investigativo ou, de preferência, englobar os dois aspectos.

As diferentes perspectivas enunciadas tanto por Fiorentini, Miorim e Miguel, como por Lins e Giménez, em última análise, dizem respeito à actividade dos alunos. Temos, por isso, que perguntar o que predomina nesta actividade: exercícios, modelações, explorações, investigações? De que modo se articulam estes diferentes tipos de tarefas? Disso dependem em grande medida os resultados da aprendizagem.

4. Um dos aspectos específicos das abordagens didácticas é o papel dos contextos, nomeadamente das "*situações reais*". Nos manuais de há um século tais situações praticamente não surgiam, a não ser nos capítulos de "Problemas" dos 1.º e 2.º graus, sendo considerados apenas como campo de aplicação. Mais recentemente, elas surgem como ponto de partida da aprendizagem (perspectiva defendida por exemplo por Jan de Lange, 1993).

5. Outra questão, ainda, diz respeito ao papel da *tecnologia*, nomeadamente calculadoras e computadores. Os alunos devem poder usar calculadora simples no seu tra-

balho em Álgebra? Devem poder usar algum tipo de *software*? Dois dos programas mais usados neste tema são a folha de cálculo (como o Excel) e os programas de cálculo simbólico (como o DERIVE). A folha de cálculo é relativamente simples de aprender, mas usa uma representação algo distante da habitual na Matemática escolar (as fórmulas ou expressões não aparecem directamente visíveis nas suas celas). Os programas de cálculo simbólico envolvem uma aprendizagem mais demorada e, muito possivelmente, só começam a ter verdadeiro interesse numa fase relativamente adiantada da aprendizagem da Álgebra por parte dos alunos.

Em relação ao uso da tecnologia no ensino da Álgebra colocam-se questões semelhantes às do estudo da Aritmética. Quando deve ser facultado o uso de tecnologia pelos alunos? Devem aprender primeiro os conceitos e processos pelos "métodos tradicionais", baseados no papel e lápis, ou devem aprender desde o início usando estes instrumentos? Com que propósito devem os alunos usar a tecnologia, para confirmar os resultados já obtidos com métodos de papel e lápis ou como instrumento de exploração?

Na verdade, a tecnologia tem muitas potencialidades mas também tem os seus problemas. Por exemplo, uma potencialidade importantíssima da calculadora gráfica é que liga expressões e gráficos, o que pode dar aos alunos *feedback* visual ilustrando vários aspectos de um mesmo objecto. Outra potencialidade não menos importante é que a calculadora realiza o trabalho mecânico e favorece a realização de explorações e investigações. Estas potencialidades têm o reverso da medalha: as representações gráficas não são transparentes e compreendê-las e usá-las pressupõe uma aprendizagem não trivial. Assim, o modo como funciona a calculadora gráfica cria uma tensão entre o currículo usual e a tecnologia (Chazan e Yerushalmy, 2003).

Os programas portugueses e as propostas do NCTM. Em Portugal, a Álgebra passou a "tema maldito" dos programas de Matemática. Tradicionalmente, a Álgebra, a par da Geometria, era um dos temas fortes do 3.º ciclo e do ensino secundário[14]. Com os programas de 1991, a Geometria mantêm-se e até reforça a sua posição, enquanto que a Álgebra desaparece como grande tema. Parte dela, sobrevive no tema "Funções", que tem um destaque significativo, e outra parte está integrada no tema "Números e cálculo". Ou seja, a Álgebra é reduzida ao cálculo algébrico e ao estudo das funções[15].

[14] Nos anos 50 e 60 do século XX, nestes níveis, eram usados "Compêndios de Álgebra", de autores como Jorge Calado, José Sebastião e Silva e José da Silva Paulo.

[15] No 3.º ciclo, são tratados temas como Equações numéricas e literais do 1.º grau; Operações com monómios e polinómios; Sistemas de equações do 1.º grau, Equação incompleta do 2.º grau, Função afim, Proporcionalidade inversa, Equação (completa) do 2.º grau; Inequações do 1.º grau.

Mais sintonizado com as actuais tendências internacionais, o *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001) valoriza a Álgebra como grande tema curricular e aponta vários aspectos a desenvolver no aluno (Ver o Quadro 5). Trata-se, no entanto, de um documento que até aqui tem tido pouco impacto na elaboração de manuais escolares e nas práticas profissionais dos professores.

Uma grande secundarização da Álgebra observa-se igualmente nos programas do ensino secundário em vigor (datados de 2001-02, com início de aplicação em 2003). Na verdade, este tema não aparece em destaque. Nos objectivos e competências gerais (p. 4) existe um grupo de itens cujo conteúdo é claramente algébrico, mas cujo título, surpreendentemente, é “ampliar o conceito de número”[16]. Além disso, aparecem alguns assuntos de Álgebra, mas sempre numa perspectiva de funções[17]. Podemos dizer, portanto, que tanto nos programas do ensino básico como nos do ensino secundário, a Álgebra desaparece como grande tema da Matemática, estando reduzida a um conjunto técnicas (cálculo algébrico) e ao estudo de funções.

Quadro 5 – Objectivos de aprendizagem na área da Álgebra do *Currículo Nacional* (ME-DEB, 2001)

- A predisposição para procurar padrões e regularidades e para formular generalizações em situações diversas, nomeadamente em contexto numérico e geométrico,
- A aptidão para analisar as relações numéricas de uma situação, explicitá-las em linguagem corrente e representá-las através de diferentes processos, incluindo o uso de símbolos,
- A aptidão para interpretar e construir tabelas de valores, gráficos, regras verbais e outros processos que traduzam relações entre variáveis, assim como para passar de umas formas de representação para outras,
- A aptidão para concretizar em casos particulares relações entre variáveis e fórmulas para procurar soluções de equações simples,
- A sensibilidade para entender e usar as noções de correspondência e de transformação em situações concretas diversas.

Pelo seu lado, como vimos, as propostas do NCTM (2000) valorizam quatro dimensões na Álgebra, que propõem ser trabalhadas desde a pré-escola até ao 12.º ano de escolaridade, envolve o estudo das estruturas algébricas, a simbolização, a modelação e o estudo da variação. Estas posições do NCTM decorrem de um movimento que

[16] Aperfeiçoar o cálculo em **R** e **C** e operar com expressões racionais, com radicais, exponenciais, logarítmicas e trigonométricas; Resolver equações, inequações e sistemas; Usar as noções de lógica indispensáveis à clarificação de conceitos.
[17] Função quadrática (incluindo inequações do 2.º grau), função módulo, funções polinomiais (3.º e 4.º); Decomposição de polinómios em factores; e Funções racionais e com radicais.

se desenha desde o início dos anos 80, a revalorização da Álgebra no currículo da Matemática escolar. Isso passa por entender a Álgebra de uma forma ampla e multifacetada, valorizando o pensamento algébrico e tornando-o uma orientação transversal do currículo, ou seja, "algebrificar" a Matemática escolar. Tornar o pensamento algébrico uma orientação transversal do currículo (papel que hoje se reconhece plenamente ao pensamento geométrico), significa, no entender de Kaput e Blanton (2005):

- Promover hábitos de pensamento e de representação em que se procure a generalização, sempre que possível,
- Tratar os números e as operações algebricamente – prestar atenção às relações existentes (e não só aos valores numéricos em si) como objectos formais para o pensamento algébrico,
- Promover o estudo de padrões e regularidades, a partir do 1.º ciclo.

Conclusão

A discussão anterior sugere então a necessidade de se repensar a abordagem curricular aos Números, reconsiderando o papel dos algoritmos, do conceito de número racional, da calculadora e dos modelos conceptuais de base, e também a abordagem da Álgebra, valorizando o pensamento algébrico e tornando-o uma orientação transversal do currículo.

Há que voltar a colocar em questão as finalidades, objectivos e conteúdos do currículo em Portugal, no que respeita a Números e Álgebra. Ao contrário da Geometria que tem sido objecto de grande atenção, sobre eles pouco se tem pensado e discutido. Ora a verdade é que começamos a perceber que existem sérias dificuldades na aprendizagem destes dois temas e que, em particular, a Álgebra foi bastante maltratada nos programas, quer do 3.º ciclo quer do secundário. Entretanto, as configurações dos currículos têm mudado a nível internacional, a tecnologia tem posto à disposição do ensino novos e mais interessantes instrumentos, e a opinião pública mostra-se cada vez mais crítica sobre as aprendizagens dos alunos. Motivos de sobra para aprofundarmos a discussão tendo em vista elaborar um currículo mais coerente e ajustado às necessidades de quem ensina e de quem aprende.

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics*, *14*(1), 24-35.

Bekken, O. (1994). *Equações de Ahmes até Abel*. Rio de Janeiro: GEPEM, Universidade de Santa Úrsula.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Childrens' strategies and errors*. Windsor: Nfer-Nelson.

Boyer, C. B., & Merzbachy, U. C. (1989). A history of mathematics. New York, NY: Wiley.

Caraça, B. J. (1958). *Conceitos fundamentais da Matemática*. Lisboa: Sá da Costa.

Cebola, G. (2002). Do número ao sentido do número. In J. P. Ponte, C. Costa, A. I. Rosendo, E. Maia, N. Figueiredo, & A. F. Dionísio (Eds.), *Actividades de investigação na aprendizagem da Matemática e na formação dos professores* (pp. 257-273). Lisboa: SEM-SPCE.

Chazan, D., & Yerushalmy, M. (2003). On appreciating the cognitive complexity of school algebra: Research on algebra learning and directions of curricular change. In J. Kilpatrick, W. G. Martin, & D. Shifter (Eds.), *A research companion to principles and standards for school mathematics* (pp. 123-135). Reston, VA: NCTM.

Davis, P., & Hersh, R. (1995). *A experiência matemática*. Lisboa: Gradiva.

De Lange, J. (1993). Innovation in mathematics education using applications: Progress and problems. In J. de Lange, C. Keitel, I. Huntley, & M. Niss (Eds.), *Innovation in maths education by modelling and applications* (pp. 3-18). New York, NY: Ellis Horwood.

Fiorentini, D., Miorim, M. A., & Miguel, A. (1993). Contribuição para um repensar... A educação algébrica elementar. *Pro-Posições*, *4*(1), 78-91.

Fraga, A., Salvado, C., Mosquito, E., Santos, T., & Ponte, J. P. (2005). Equações do 2.º grau do fim do século XIX ao início do século XXI. *Actas do XIV Encontro de Investigação em Educação Matemática da SPCE*. Lisboa: SEM-SPCE.

Kaput, J., & Blanton, M. (2005). Algebrafying elementary mathematics in a teacher-centered, systemic way. (Retirado em 30 Junho de 2005 de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads/AlgebrafyingMath.pdf)

Kolmogorov, A. N., & et al. (1977). *Mathematics, its contents, method and meaning* (2ª impressão em *paperback*). Boston, MA: MIT Press.

Lins, R., & Giménez, J. (1997). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o século XXI*. São Paulo: Papirus.

ME-DEB (2001). *Currículo nacional do ensino básico: Competências essenciais*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

ME-DES (2001-02). *Matemática A (10.º, 11.º, 12.º anos)*. Lisboa: Ministério da Educação, Departamento do Ensino Secundário (retirado em 04/Julho/2005 de http://www.dgidc.min-edu/programs/prog_hm.asp)

ME-DGEBS (1990). *Programa do 1.º ciclo do ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991a). *Organização curricular e programas (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (2.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991c). *Organização curricular e programas (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

ME-DGEBS (1991d). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem (3.º ciclo do ensino básico)*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção-Geral do Ensino Básico e Secundário.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: Autor.

Ponte, J. P., Matos, J. M., & Abrantes, P. (1998). *Investigação em educação matemática: Implicações curriculares*. Lisboa: IIE.

Ponte, J. P., & Serrazina, L. (2004). As práticas dos professores de Matemática em Portugal. *Educação e Matemática, 80*, 8-12.

Rojano, T. (2002). Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English, M. B. Bussi, G. A. Jones, R. A. Lesh, & D. Tirosh (Eds.), *Handbook of international research in mathematics education* (Vol. 1, pp. 143-161). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

Stanic, G. M. A., & Kilpatrick, J. (1989). Historical perspectives on problem solving in the mathematics curriculum. In R. I. Charles & E. A. Silver (Eds.), *The teaching and assessing of mathematical problem solving* (pp. 1-22). Reston, VA: NCTM e Lawrence Erlbaum.

Usiskin, S. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. In A. F. Coxford & A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra* (1988 Yearbook, pp. 8-19). Reston, VA: NCTM.